

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

- 1.** Pe tablă sunt scrise trei numere reale, nenule nu neapărat distincte. Când în locul lor s-au scris produsul lor, suma lor și suma produselor lor luate câte două, s-a constatat că pe tablă au apărut aceleași numere ca și cele inițiale. Care au fost numerele scrise inițial pe tablă?

Soluție:

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ sunt numerele inițiale, atunci $abc, a+b+c, ab+bc+ca$ sunt noile numere 1p

Dacă $abc = a \Rightarrow bc = 1$ 2p

1° Dacă $a+b+c = a \Rightarrow b+c = 0 \Rightarrow b = -c$ și din $bc = 1 \Rightarrow -b^2 = 1$ (fals!) 1p

2° Dacă $a+b+c = b \Rightarrow a+c = 0 \Rightarrow c = -a$, din $abc = 1 \Rightarrow -ab = 1$; din $ab+bc+ac = c \Rightarrow a^2 = a \Rightarrow a = 1$, iar numerele sunt: 1, -1, -1 2p

3° Dacă $a+b+c = c \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow b = -a$, din $ab+bc+ac = b \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -1$ și $c = -1$
numerele sunt: 1, -1, -1 1p

(Din motive de simetrie, cazurile $abc = b$ și $abc = c$ dau aceleași soluții)

- 2.** a) Demonstrați că $(1+a)^n \geq 1+na$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, a \in (0, \infty)$.

b) Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică de rație $r > 0$, iar $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică de rație $q > 1$. Dacă $a_1 = b_1 > 0$ și $a_2 = b_2$ arătați că $b_n \geq a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (folosiți eventual inegalitatea de la a)).

Soluție:

a) demonstrează inegalitatea (prin inducție matematică) 2p

b) Scrie $a_n = a_1 + (n-1)r$ și $b_n = b_1 q^{n-1}$ 2p

Fie $a_1 = b_1 = a > 0$ atunci $r = a(q-1)$ 1p

$b_n = a q^{n-1} = a(1+q-1)^{n-1} \geq a(1+(q-1)(n-1)) = a+r(n-1) = a_n$ 2p

- 3.** Fie ABCD un patrulater convex, P mijlocul segmentului $[AB]$ și $M \in [BC], N \in [AD]$ astfel

$$\text{încât } \frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{3}.$$

a) Exprimați vectorii \overrightarrow{PM} și \overrightarrow{PN} în funcție de vectorii $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD}$.

b) Demonstrați că mijloacele segmentelor $[AB], [MN]$ și $[CD]$ sunt puncte coliniare.

Soluție:

3. a) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB})$ 1p

$\overrightarrow{PM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{PA}$ 1p

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA})$ 1p

$\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PA}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

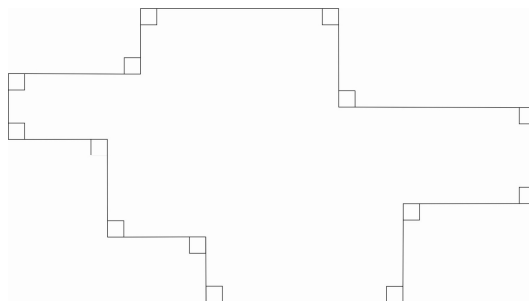
b) Fie F și G mijloacele segmentelor $[MN]$, respectiv $[CD]$.

$$\overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{PC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{PA}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{PD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PA}\right) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \dots\dots\dots 1p$$

Deducem că $\overrightarrow{PG} = 3\overrightarrow{PF} \Rightarrow P, F, G$ -coliniare 1p

4. Zidul unei cetăți reprezintă o linie poligonală închisă(vezi figura de mai jos). Fiecare două semente vecine ale acestei linii poligonale formează un unghi drept. Într-o noapte, un parașutist a aterizat lângă zidul cetății. Acesta nu știe dacă este în interiorul sau în exteriorul cetății. Ocolește zidul cetății și numără câte cotituri face la stânga și câte la dreapta într-un tur complet.



a) Câte cotituri face parașutistul la dreapta și câte la stânga, dacă ocolește zidul astfel încât acesta să rămână mereu în dreapta sa, în ambele cazuri(ocolire interioară sau ocolire exterioară)?

b) Cum deduce parașutistul dacă a aterizat în interiorul sau exteriorul cetății?

Soluție:

Parașutistul lasă parașuta într-un punct lângă zid(punct de pornire), diferit de un colț al zidului ... 1p

Dacă cetatea se ocolește prin exteriorul zidului, se vor face 9 cotituri la dreapta și 5 cotituri la stânga 2p

Dacă cetatea se ocolește prin interiorul zidului, se vor face 5 cotituri la dreapta și 9 cotituri la stânga 2p

Din diferența de 4 cotituri, parașutistul deduce dacă a aterizat în interiorul sau în exteriorul cetății 2p

(9 ocoliri la dreapta \Rightarrow ocolire exterioară)

(5 ocoliri la dreapta \Rightarrow ocolire interioară)

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

- 1.** Un automobil se deplasează cu viteza de 90 km/h la vale, cu 72 km/h pe loc drept și cu 60 km/h la deal. În aceste condiții automobilul a parcurs distanța de la orașul A la orașul B în 5 ore, iar distanța de la orașul B la orașul A în 4 ore. Aflați distanța dintre A și B .

Soluție:

Dacă x, y, z sunt distanțele în km parcurse de automobil la vale, pe loc drept și la deal de la A la B

..... 1p

Atunci x, y, z sunt distanțele parcurse de automobil la deal, pe loc drept și la vale de la B la A 1p

$$5 = \frac{x}{90} + \frac{y}{72} + \frac{z}{60} \dots\dots\dots 2p$$

$$4 = \frac{x}{60} + \frac{y}{72} + \frac{z}{90} \dots\dots\dots 2p$$

$$9 = \frac{x+y+z}{36}, x+y+z = 324 \text{ km} \dots\dots\dots 1p$$

- 2.** a) Demonstrați că $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \dots \cdot \log_{2011} 2012 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Fie z un număr complex, nenul, arătați că $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R}$.

Soluție:

a) Se demonstrează că $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \dots \cdot \log_{2011} 2012 = \log_2 2012$ 2p

$\log_2 2012 = 2 + \log_2 503$ 1p

Demonstrăm prin reducere la absurd ca $\log_2 503 \notin \mathbb{Q}$ și rezulta ca nici $\log_2 2012 \notin \mathbb{Q}$ 1p

b) $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 1p

$$\frac{|z|}{z} = \frac{a - bi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$$

- 3.** a) Demonstrați că $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, pentru orice $x, y \in [0, \infty)$.

b) Demonstrați că $x + \frac{1}{x} \geq 2$ și $2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^x \geq 12$, pentru orice $x > 0$ (puteți utiliza și inegalitatea mediilor).

c) Rezolvați în \mathbb{R}^* , ecuația $2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^x + (\sqrt{6})^{x+\frac{1}{x}} = 18$.

Soluție:

a) Demonstrează că $x + y \geq 2\sqrt{xy}, \forall x, y \geq 0$ 1p

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

- b) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 1p
- $2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^x \geq 2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}} \cdot 3^{x+\frac{1}{x}}} \geq 2\sqrt{2^2 \cdot 3^2} = 12$ 2p
- c) $x < 0$ nu este soluție 1p
- $x > 0$; conform b) membrul stâng ≥ 18 1p
- Inegalitatea devine egalitate dacă $x + \frac{1}{x} = 2$, deci $x = 1$ 1p

4. Punctele spațiului fizic obișnuit sunt colorate în mod arbitrar cu două culori.

Demonstrați că există un segment ale cărui extremități și mijloc sunt la fel colorate.

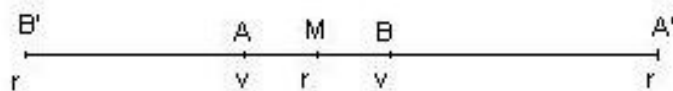
Soluție:

Reducem la absurd (presupunem că nu există un astfel de segment). 1p

Fie verde și roșu, cele două culori.

Considerăm un segment AB, având extremitățile colorate în verde. (există un astfel de segment, pentru că în caz contrar problema devine banală) 1p

Atunci mijlocul M al acestui segment este colorat cu roșu 1p



Fie A' simetricul punctului A față de B și B' simetricul punctului B față de punctul A 1p

Deoarece punctele A și B sunt colorate cu verde, rezultă că punctele A' și B' au culoarea roșu (în caz contrar punctele A, B și A' sau B, A și B' ar contrazice ipoteza făcută) 1p

Conform construcției făcute rezultă că punctul M este mijlocul segmentului $A'B'$ 1p

Dar punctele A' , M și B' sunt colorate cu roșu, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Așadar, există un segment cu cerințele problemei 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. Fie $A = \{(x, y) / |x| + |y| \leq 5\}$

- a) Într-un reper ortogonal (xOy) , rezolvând inecuațiile corespunzătoare fiecărui cadran, reprezentați mulțimea A , prin hașurare.
b) Să se demonstreze că oricum am alege 101 puncte din A , există cel puțin două dintre acestea la o distanță mai mică sau egală cu 1 (împărțind pătratul prin paralele la laturi).

Soluție:

a) A este formată din mulțimea punctelor pătratului $MNPQ$, $M(5,0); N(0,5); P(-5,0); Q(0,-5)$

..... 3p

b) Împărțim pătratul în 100 de pătrățele de latură $\frac{\sqrt{2}}{2}$ prin paralele la laturile pătratului mare 2p

Cel puțin un pătrățel conține măcar 2 puncte 1p

Distanța dintre aceste două puncte este cel mult egală cu diagonala, deci cu 1 1p

2. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x} + \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$

Studiați existența limitei $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ pentru $a = -\infty$, $a = 0$, $a = 1$ și $a = \infty$.

Soluție:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 1p

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 - \sqrt{3}$ 1p

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \infty$ 2p

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} = \frac{1}{2}$ 1p

Nu există $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 1p

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ 1p

3. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Demonstrați că $A^2 + A - 2I_3 = O_3$

b) Demonstrați că A este inversabilă și determinați A^{-1} .

c) Rezolvați în $M_3(\mathbb{R})$, ecuația $AX = A^2 - I_3$.

Soluție:

a) Verifică egalitatea $A^2 + A - 2I_3 = O_3$ 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

b) $A \cdot \frac{1}{2}(A + I_3) = I_3 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 3p$

c) $X = A^{-1}(A^2 - I_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $f(x-y) - xf(y) \leq 1-x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

a) Demonstrați că $f(x) \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $1 - \frac{1-f(0)}{x} \leq f(x) \leq 1$, pentru orice $x > 0$. Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

c) Determinați toate funcțiile f care verifică condiția dată.

Soluție:

a) Pentru $x = 0 \Rightarrow f(-y) \leq 1, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2p$

b) pentru $x = y \Rightarrow f(0) - xf(x) \leq 1 - x \Rightarrow 1 + \frac{f(0)-1}{x} \leq f(x)$, pentru orice $x > 0$. $\dots\dots\dots 1p$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \dots\dots\dots 1p$

c) Pentru $x > 0$ și $y \in \mathbb{R}$ avem $\frac{f(x-y)}{x} - f(y) \leq \frac{1}{x} - 1$, deci $f(y) \geq \frac{f(x-y)}{x} - \frac{1}{x} + 1 \dots\dots\dots 1p$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x-y)}{x} - \frac{1}{x} + 1 \right) = 1 \dots\dots\dots 1p$

Rezultă $f(y) \geq 1, \forall y \in \mathbb{R}$ și concluzia $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. Pe $G = (3, \infty)$ definim legea de compoziție $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3, \forall x, y \in G$.

a) Să se demonstreze că (G, \circ) este grup abelian.

b) Calculați $5 \circ 8'$, unde $8'$ este inversul lui 8 în G .

c) Demonstrați că, dacă H este subgrup al lui (G, \circ) care conține toate numerele naturale mai mari sau egale cu 4, atunci H conține toate numerele raționale $q > 3$.

Soluție:

a) - operația " \circ " este comutativă și asociativă 1p

- elementul neutru este $e = 4 \in G$ 1p

- oricare $x \in G$ admite $x' = 3 + \frac{1}{x-3} \in G$ 1p

b) $5 \circ 8' = 5 \circ \left(3 + \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 = 3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$ 2p

c) $q = \frac{a}{b} > 3, a, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a - 3b > 0$ și cum $a, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a - 3b \geq 1$ deci $a - 3b + 3 \geq 4$ și $b + 3 \geq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - 3b + 3, b + 3 \in H$. Din $(a - 3b + 3) \circ (b + 3)' \in H \Rightarrow \frac{a - 3b}{b} + 3 = \frac{a}{b} = q \in H$ 2p

2. Calculați $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^3 + 1)}$.

Soluție:

$I = \int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3(x^3 + 1)}$ 2p

$x^3 = t \Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{dt}{t(t+1)}$ 2p

$I = \frac{1}{3} \int_1^8 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{3} \ln \frac{t}{t+1} \Big|_1^8$ 2p

$I = \frac{1}{3} \ln \frac{16}{9}$ 1p

3. Considerăm $f: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ o funcție derivabilă cu $f(1) = 1$, pentru care ordonata punctului de intersecție a axei Oy cu tangenta într-un punct oarecare al graficului funcției f este egală cu jumătate din ordonata punctului de tangență.

a) Demonstrați că $xf'(x) = \frac{1}{2}f(x), x \geq 1$.

b) Demonstrați că $\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln \sqrt{\frac{x}{a}}$, pentru orice $x \geq 1, a \geq 1$ fiind un număr fixat.

c) Determinați funcția f .

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Soluție:

a) Ecuația tangentei în $M(x_0, y_0) \in G_f$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 \geq 1$ și taie Oy în

$$A(0, f(x_0) - x_0 f'(x_0)) \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{1}{2} f(x_0) = f(x_0) - x_0 f'(x_0), x_0 \geq 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int_a^x \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln t \Big|_a^x = \ln \sqrt{\frac{x}{a}} \dots\dots\dots 2p$$

$$c) \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln \frac{f(x)}{f(a)} \dots\dots\dots 1p$$

$$\ln \frac{f(x)}{f(a)} = \ln \sqrt{\frac{x}{a}} \Rightarrow f(x) = c\sqrt{x}, c \text{ constantă} \left(c = \frac{f(a)}{\sqrt{a}} \right) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } f(1) = 1 \Rightarrow c = 1 \text{ și } f(x) = \sqrt{x}, x \geq 1 \dots\dots\dots 1p$$

4. Se consideră în plan trei discuri disjuncte D_1, D_2, D_3 de raze r_1, r_2, r_3 . Notăm $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ și S aria lui D . Știind că proiecția lui D pe axele unui reper xOy sunt două segmente având suma lungimilor egală cu 1, se cere:

a) Arătați că $S \leq \frac{1}{4}$;

b) $r_1 + r_2 + r_3 \geq \frac{1}{4}$;

c) $S \geq \frac{\pi}{48}$.

Soluție:

a) Fie $(AB), (A'B')$ proiecțiile mulțimii D pe cele două axe și $MNPQ$ dreptunghiul determinat de paralele duse prin A, B, A', B' la axe, deci $MN + NP = 1$ 1p

Dreptunghiul $MNPQ$ conține mulțimea D 1p

$$S_D \leq S_{MNPQ} = MN \cdot NP \leq \left(\frac{MN + NP}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 1p$$

b) Deoarece proiecția lui D pe fiecare axă este un segment și proiecția unui cerc pe o dreaptă este proiecția diametrului, paralel cu dreapta, pe dreaptă, rezultă $2r_1 + 2r_2 + 2r_3 \geq AB$ și

$$2r_1 + 2r_2 + 2r_3 \geq A'B', \text{ sumând rezultă } 4r_1 + 4r_2 + 4r_3 \geq 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$c) r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \geq \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$S_D = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \geq \frac{\pi}{3}(r_1 + r_2 + r_3)^2 \geq \frac{\pi}{48} \dots\dots\dots 1p$$